2007 $\boxed{2}$

nを2以上の自然数とする。1つのさいころをn回投げ、第1回目から第n回目までに出た目の最大公約数をGとする。

(1) $G=3$となる確率をnの式で表せ。

(2) Gの期待値をnの式で表せ.

2007 ② (解答)

(1)

$G=3$ のとき

3または6だけがn回出て，かつ，6が続けてn回出ない場合より，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)

$G=6$ のとき
6がn回出る場合より　$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$G=5$ のとき
5がn回出る場合より　$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$G=4$ のとき
4がn回出る場合より　$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$G=2$ のとき
2，4，6がn回出て，かつ，4が続けてn回出ない，かつ，6が続けてn回出ない場合より

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$G=1$ のとき
余事象を考えて

$$1-\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，Gの期待値は

$$1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+3\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$
$$+4\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+5\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+6\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$=8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$$

公式

○事象Aの起こる確率$P(A)$の求め方

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象Aの起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

○Xのとりうる値を $x_1, \cdots, x_n$，Xがこれらの値をとる確率を$p_1, \cdots, p_n$とするとき，Xの期待値Eは

$$E = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n \quad \text{ただし } p_1 + \cdots p_n = 1$$

○最大公約数…0ではない整数の公約数のうち最大のもの

公約数…2つ以上の整数に共通な約数。

ポイント

○nに具体的な数字を入れて実験してみる

(例) $n=2$のとき　$G=1$の確率は…

$n=3$のとき　〃

おおよその目安として，数字を3つくらい入れて考えよう．

○1〜6までの数字の全ての約数を把握しよう．

1 … 1
2 … 1，2
3 … 1，，3
4 … 1，2，，4
5 … 1，，，，5
6 … 1，2，3，，，6

⇨ 最大公約数のパターンには2つある

つまり，『1，2，3』と『4，5，6』

○余事象を上手に使おう．